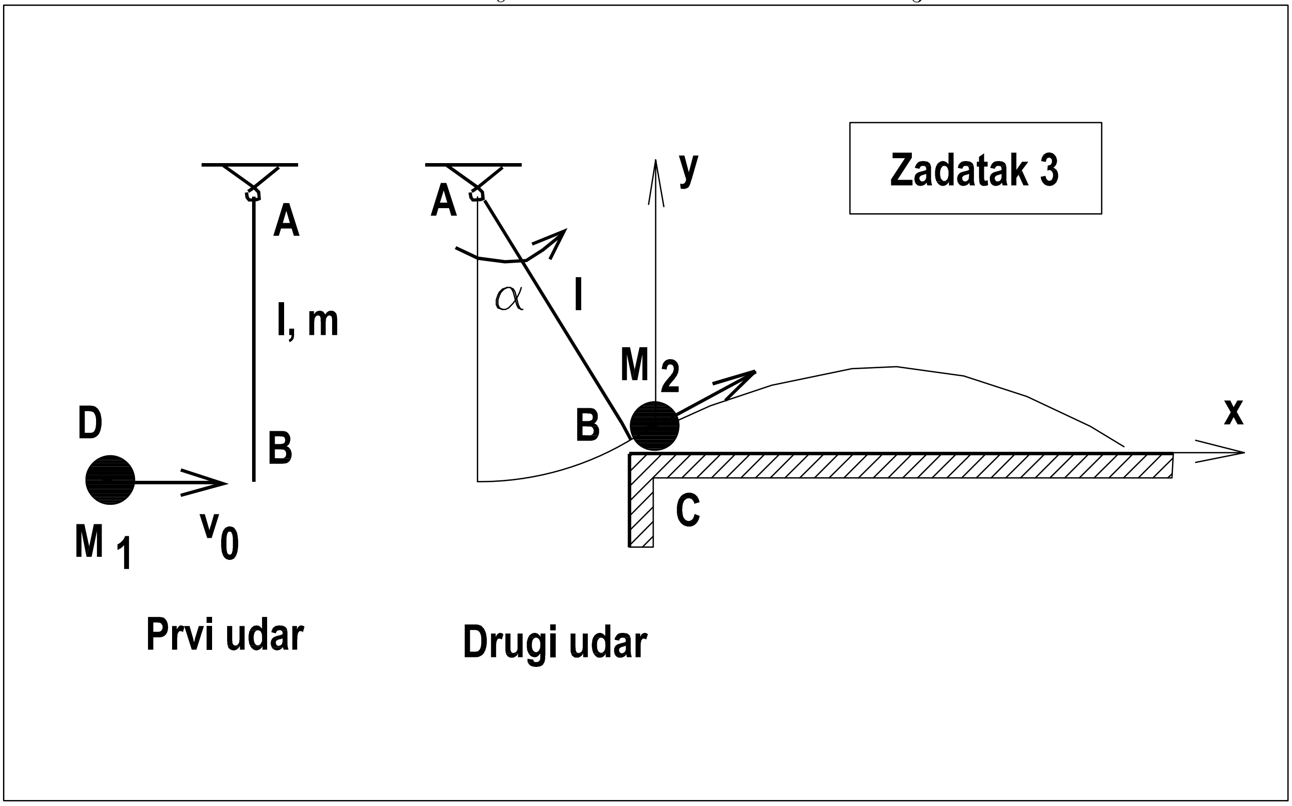
Tehnička mehanika 2 - drugi deo ispita

(Prvi deo: 29. avgusta 2005.)

ZADATAK 1 (...20%)
Prikazati kos hitac materijalne tačke u bezvazdušnom prostoru.
ZADATAK 2 (...20%)
Objasniti osnovne pojmove i predpostavke, kao i analizu, sudara dva tela.
ZADATAK 3 (...60%)
Materijalna tačka D, mase M_1, kreće se pravolinijski u horizontalnom pravcu sa konstantnom brzinom v_0. U jednom trenutku tačka D udari u kraj B štapa AB, mase m i dužiine l, koji je okačen o zglob A i miruje u vertikalnom položaju, sl. 1. Posle udara tačke D, za koji se smatra da je idealno elastičan, štap se obrće oko zgloba A i posle okretanja za ugao α, štap udara u tačku C, mase M_2, koja se do tog trenutka nalazila u stanju mirovanja na ivici horizontalne nepokretne podloge. Ako se smatra da je udar štapa u tačku C takođe idealno elastičan, odrediti kretanje tačke C posle udara štapa. Posebno odrediti max domet i max visinu penjanja tačke C.
Dati su numerički podaci: $v_0 = 10\frac{m}{s}$,, $m = 10\,kg$, $l = 2.0\,m$, $M_1 = \frac{1}{3}m$, $M_2 = m$, $\alpha = 30^0$.



Napomena: raspoloživo vreme je 120 minuta.

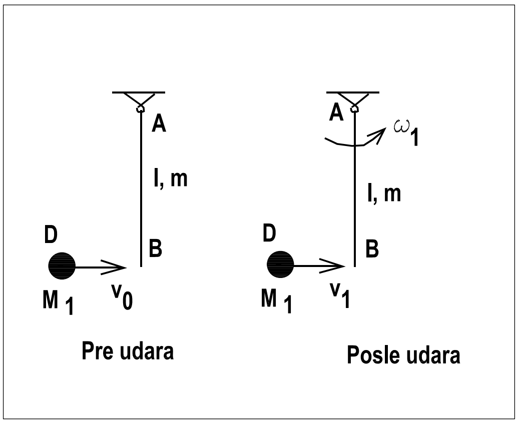
Tehnička mehanika 2 - rešenja drugog dela

(Prvi deo: 29. avgusta 2005.)

NAPOMENA: Odgovori na teoretska pitanja postavljena u Zadacima 1 i 2 se ovde ne prikazuju.

ZADATAK 3 (. . . 60%)

Posmatra se prvi udar - udar tačke D o nepokretan štap AB. Stanje brzina neposredno pre i neposredno posle udara je prikazano na slici.



Tačka D ima brzinu neposredno pre udara o štap v_0, dok štap miruje, a neposredno posle udara tačka D ima brzinu v_1, a štap ima ugaonu brzinu ω_1. Zakon o promeni momenta količine kretanja sistema tačka - štap, napisan za nepokretnu tačku A, glasi:

$$\vec{D}_2^A - \vec{D}_2^A = \vec{H}^A = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$(J_A\omega_1 + M_1 v_1 l) - M_1 v_0 l = 0 \tag{1}$$

Kako je udar idealno elastičan, to je $T_2 - T_1 = 0$ odnosno

$$(\frac{1}{2}J_A\omega_1^2 + \frac{1}{2}M_1 v_1^2) - \frac{1}{2}M_1 v_0^2 = 0 \tag{2}$$

Pri tome je J_A momenat inercije mase štapa AB za tačku A, koji je jednak: $J_A = \frac{1}{3}ml^2$. Iz jedn. (1) se dobija brzina tačke D neposredno posle udara u obliku:

$$v_1 = v_0 - \frac{J_A}{M_1 l} \cdot \omega_1 \tag{3}$$

odnosno, imajući u vidu izraz za momenat inercije štapa, kao i da je $M_1 = \frac{1}{3}m$, dobija se:

$$v_1 = v_0 - \frac{m}{3M_1} \cdot \omega_1 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = v_0 - l \cdot \omega_1 \tag{4}$$

Unoseći izraz (4) u jedn. (2) dobija se:

$$J_A\omega_1^2 + M_1(v_0 - l\omega_1)^2 - M_1 v_0^2 = 0$$

odnosno, posle sređivanja

$$(J_A + M_1 l^2) \cdot \omega_1^2 - 2M_1 l v_0 \cdot \omega_1 = 0 \tag{5}$$

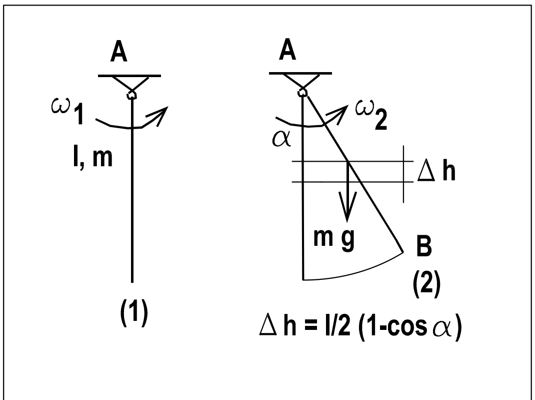
Jedno rešenje jedn. (5) je

$$\omega_1 = 0 \qquad v_1 = v_0$$

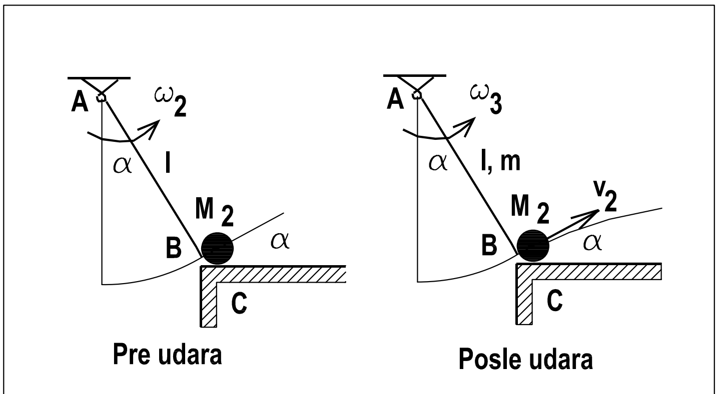
i to rešenje nema smisla, jer bi značilo da tačka D „prođe“ kroz štap, dok je drugo rešenje dato sa:

$$\omega_1 = \frac{2M_1 l}{J_A + M_1 l^2} \cdot v_0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_1 = \frac{v_0}{l}, \qquad v_1 = 0 \tag{6}$$

i predstavlja razmenu brzina posle idealno elastičnog udara (posledica odnosa masa tačke i štapa). Znači, posle udara tačke u štap, tačka se zaustavi, a štap počinje da se obrće oko tačke A sa početnom brzinom ω_1 datom sa (6).
Posmatra se kretanje štapa i udar štapa u tačku C. Prvo treba da se odredi ugaona brzina štapa neposredno pre kontakta sa tačkom C, a zatim da se analizira udar štapa u tačku. Ugaona brzina štapa neposredno pre udara u tačku C se određuje primenom zakona o promeni kinetičke energije, $T_2 - T_1 = A_{12}$, gde je položaj (1) položaj štapa neposredno posle udara tačke D o štap, a položaj (2) trenutak neposredno pre udara štapa u tačku C. To, kao i predpostavljene brzine štapa i tačke C neposredno posle udara štapa, prikazano je na slici:



Kretanje stapa posle udara tacke D



Udar stapa u tacku C

Zakon o promeni kinetičke energije pri kretanju štapa iz položaja (1) do položaja (2), koji predstavlja rotaciju štapa za ugao α, glasi:

$$T_2 - T_1 = A_{12} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}J_A\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_A\omega_1^2 = -mg\frac{l}{2}(1 - cos\alpha) \tag{7}$$

Rešavanjem se dobija:

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 - \frac{mgl}{\frac{1}{3}ml^2} \cdot (1 - cos\alpha)$$

ili, imajući u vidu rešenje (6) za ugaonu brzinu ω_1,

$$\omega_2^2 = \frac{v_0^2}{l^2} - \frac{3g}{l} \cdot (1 - cos\alpha) \tag{8}$$

Ako se unesu zadate numeričke vrednosti, naime $l = 2.0\,m$, $\alpha = 30^0$, $v_0 = 10\frac{m}{s}$, dobijaju se ugaone brzine štapa AB neposredno posle udara tačke D u štap, kao i neposredno pre udara štapa u tačku C, u iznosu:

$$\omega_1 = 5.0\ \frac{rad}{s} \qquad \omega_2 = 4.799\ \frac{rad}{s} \tag{9}$$

Posmatra se sada udar štapa u tačku C. Koriste se iste (analogne) relacije kao i u slučaju prvog udara, jer je i drugi udar idealno elastičan:

$$D_2^A - D_1^A = 0 \quad \Rightarrow \quad (J_A\omega_3 + M_2 v_2 l) - J_A\omega_2 = 0 \tag{10}$$

$$T_2 - T_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\frac{1}{2}J_A\omega_3^2 + \frac{1}{2}M_2 v_2^2) - \frac{1}{2}J_A\omega_2^2 = 0 \tag{11}$$

Rešavanjem jednačina (10) I (11) dobija se ugaona brzina štapa AB, kao i brzina tačke C, neposredno posle udara štapa u tačku C. Naime, iz jedn. (10) se dobija, imajući u vidu da je $M_2 = m$:

$$\omega_3 = \omega_2 - \frac{M_2 l}{J_A} \cdot v_2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_3 = \omega_2 - \frac{3}{l} \cdot v_2 \tag{12}$$

Unoseći rešenje (12) u jedn. (11), dobija se, posle malo sređivanja,

$$(M_2 + \frac{9J_A}{l^2}) \cdot v_2^2 - \frac{6J_A\omega_2}{l} \cdot v_2 = 0 \tag{13}$$

Iz jedn. (13) se dobijaju dva rešenja. Jedno rešenje je

$$v_2 = 0 \qquad \omega_3 = \omega_2$$

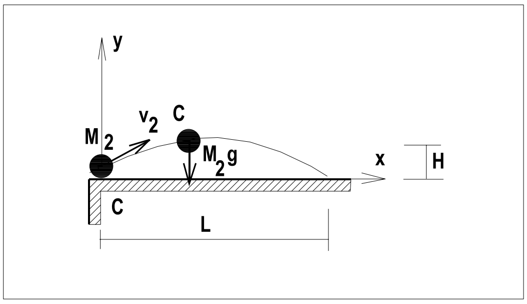
i ovo rešenje nema smisla, dok je drugo rešenje dato sa:

$$v_2 = \frac{6\frac{J_A}{l}}{M_2 + 9\frac{J_A}{l^2}} \cdot \omega_2 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \frac{l}{2} \cdot \omega_2 \qquad \omega_3 = -0.5\omega_2 \tag{14}$$

Zamenom numeričkih vrednosti se dobija:

$$v_2 = 4.799\,\frac{m}{s} \qquad \omega_3 = -2.399\,\frac{rad}{s}$$

Znači, neposredno posle udara štapa u tačku C, štap dobija ugaonu brzinu suprotnog smera u odnosu na stanje pre udara, tako da štap posle udara počinje da se obrće u suprotnom smeru (u nazad), dok dačka C dobija brzinu v_2, pod uglom α u odnosu na horizontalu, tako da počinje da vrši kos hitac.
Posmatra se sada kos hitac tačke C, kao posledicu udara štapa AB.



Dif. jed. slobodnog kretanja tačke C su date sa:

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = -g$$

Opšti integral je dat sa

$$x(t) = C_1 t + C_2 \qquad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + D_1 t + D_2$$

Početni uslovi kretanja tačke C su dati sa:

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = v_2 \cos\alpha \qquad\qquad y(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = v_2 \sin\alpha$$

odakle se dobija:

$$C_1 = v_2 \cos\alpha, \qquad C_2 = 0 \qquad\qquad D_1 = v_2 \sin\alpha, \qquad D_2 = 0$$

tako da su konačne jednačine kretanja tačke C date sa:

$$x(t) = v_2 t \cdot \cos\alpha \qquad \dot{x}(t) = v_2 \cos\alpha \tag{15}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t \cdot \sin\alpha \qquad y(t) = -gt + v_2 \sin\alpha \tag{16}$$

Jednačina trajektorije se dobija u obliku:

$$y(t) = -\frac{g}{2v_2^2\cos^2\alpha}\cdot x^2 + \tan\alpha\cdot x \tag{17}$$

odakle se, iz uslova $y = 0$ i $x = L$ dobija maksimalan domet tačke na horizontalnu ravan u obliku:

$$L = \frac{v_2^2}{g}\cdot\sin 2\alpha \tag{18}$$

Odgovarajuće vreme se iz konačne jednačine kretanja, iz uslova $y = 0$, dobija kao:

$$t = \frac{2v_2}{g}\cdot\sin\alpha$$

Maksimalna visina penjanja se dobija iz uslova $\dot{y} = 0$:

$$\dot{y} = 0 \qquad t_* = \frac{v_2}{g}\cdot\sin\alpha \tag{19}$$

prema relaciji:

$$H = x(t_*) \qquad \Rightarrow \qquad H = \frac{1}{2}\cdot\frac{v_2^2\cdot\sin 2\alpha}{g} \tag{20}$$

Zamenom numeričkih vrednosti se dobija maksimalan domet:

$$L = 2.031\,m \qquad t = 0.122\,s$$

kao i maksimalna visina penjanja:

$$H = 0.293\,m \qquad t = 0.061\,s$$